PROCEDURA PER IL CALCOLO DELLE ALTEZZE DELLE MONTAGNE LUNARI CON IL METODO DELLA MISURAZIONE DELLE OMBRE.

L.IN.E.A.RI.S. Laboratorio Interdisciplinare per L'Educazione all'Astronomia e Ricerca Scientifica – Responsabile
Alessandro Rosselli
Progetto: Alessandro Rosselli, Riccardo Particelli, Enzo Bartalini

L'esperienza è composta da tre fasi.

1° FASE

Vengono spiegati agli studenti i concetti e le terminologie necessarie per lo svolgimento dell'esercitazione.
Disposizione delle ombre sulla superficie lunare, terminatore, punto subsolare, condizione di perpendicolarità, colongitudine, librazione in longitudine, campionamento immagine.

Quando osserviamo la Luna, riusciamo a vedere i profili delle montagne e dei crateri grazie alle ombre proiettate sulla superficie. Dobbiamo quindi osservare nei momenti di fase lunare quando è ben distinguibile il terminatore, cioè la zona di separazione tra giorno e notte. In questo caso infatti, nei pressi del terminatore, saranno evidenti le caratteristiche del tormentato suolo lunare.
In queste condizioni, osservando un rilievo, vedremo la sua ombra partire dalla sommità e stendersi sul terreno. Potremo considerare l'ombra come l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, avente per base la lunghezza dell'ombra che si stende sul terreno e per altezza l'altezza della montagna, come si può vedere dal disegno 1.
Su una sfera, illuminata da una fonte di luce proveniente da molto lontano, le ombre si dispongono sulla superficie lungo i circoli massimi passanti tra il punto subsolare (punto nel quale i raggi luminosi cadono perfettamente a picco, posizionato esattamente al centro dell'emisfero illuminato) e il punto in misura. Ma la direzione lungo la quale dovrà essere misurata l'ombra, che va dalla sommità della montagna sino alla fine dell'ombra al suolo, è sempre la stessa, quella dei raggi solari, per qualsiasi luogo della Luna. Naturalmente va scelto un luogo dove sia abbastanza agevole prendere la misura e dove il terreno sia abbastanza regolare per non causare distorsioni sulla direzione e lunghezza dell'ombra.
Da quanto sopradetto deriva che se la direzione del nostro sguardo è perpendicolare alla direzione dei raggi solari noi misureremo sempre una lunghezza reale dell'ombra , in qualsiasi posizione, visualmente agibile, si trovi il rilievo. Invece se questo non

avviene, la misura sarà tanto più falsata quanto più ci allontaniamo dalla condizione di perpendicolarità.
Dovremo quindi conoscere l'angolo che ci separa da questa condizione, il quale ci permetterà di calcolare la lunghezza reale dell'ombra.
Come si vede dal disegno 1, questo angolo chiamato ϵ, dipende sia dalla colongitudine Col che dalla librazione in longitudine $l\lambda$.

La colongitudine è definita come la posizione del terminatore, sull'alba lunare, misurata verso Ovest da 0° a 360°, partendo dal meridiano centrale.

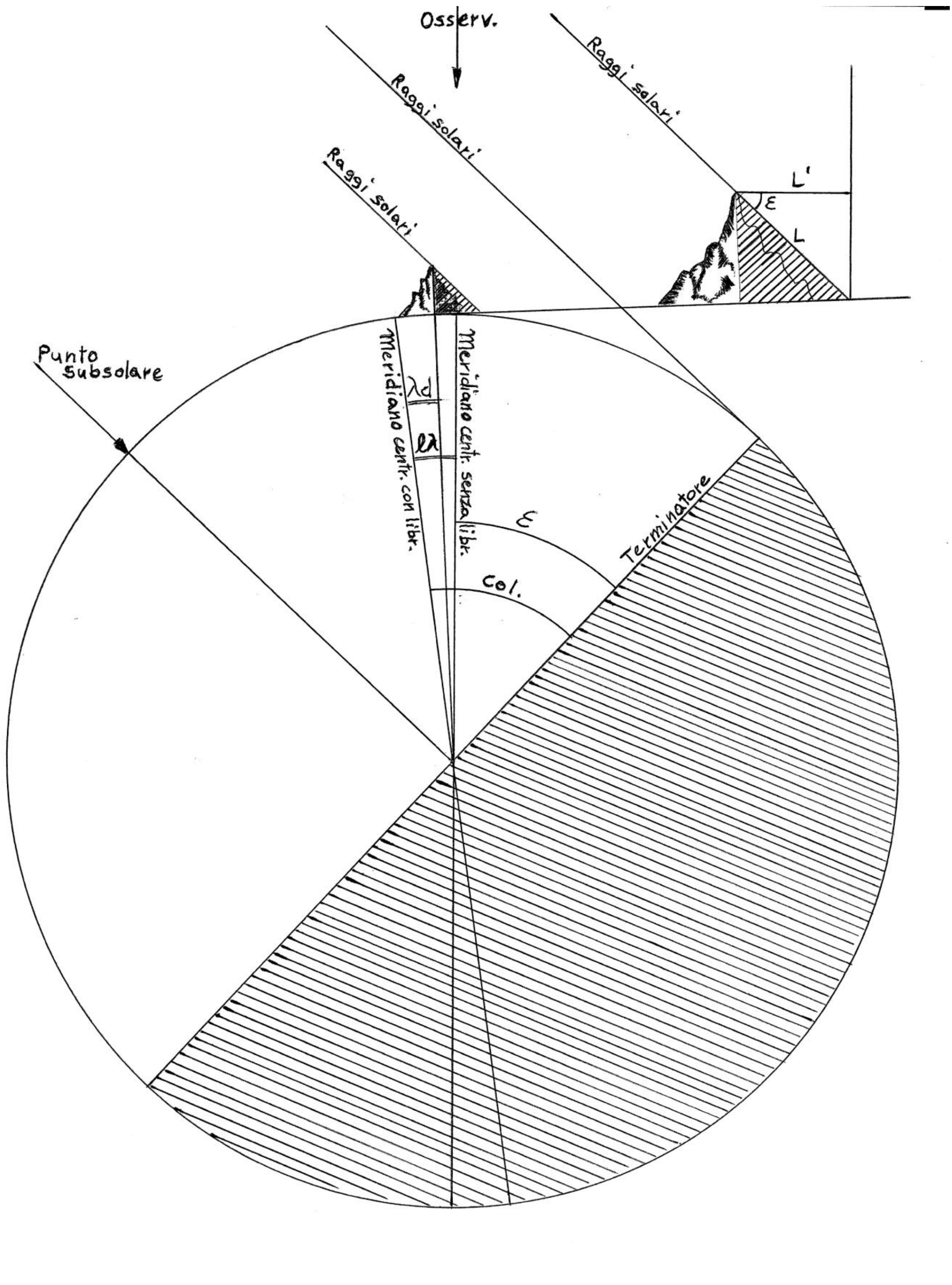
La Luna ruota intorno al proprio asse, compiendo un giro nel medesimo tempo impiegato per compiere una rivoluzione intorno alla Terra. Entrambe i movimenti sono in senso antiorario, se visti dal polo nord del sistema.
La librazione in longitudine dipende dal fatto che mentre la Luna ha una velocità di rotazione costante intorno al proprio asse non ha invece una velocità di rivoluzione costante intorno alla Terra. L'orbita della Luna è infatti un ellisse, quindi la sua distanza dalla Terra varia da un minimo, perigeo, ad un massimo, apogeo. Quando la Luna è più vicina alla Terra essa si muove più velocemente mentre rallenta quando è più lontana. Quindi, nel primo caso, la rotazione sarà in leggero ritardo rispetto alla rivoluzione e noi potremo vedere un poco di più la parte Est. Nel secondo caso invece la rotazione sarà in anticipo sulla rivoluzione e noi potremo vedere poco di più della parte Ovest.

Le moderne macchine fotografiche digitali hanno, al posto della vecchia pellicola, un sensore formato da tante piccolissime singole unità disposte come i quadretti su una pagina di quaderno. Esse hanno la proprietà di assumere una carica elettrica proporzionale alla quantità di energia luminosa che le colpisce.
Successivamente allo scatto della foto queste unità vengono lette, una per una, ed in base ai valori raccolti è possibile, punto per punto, ricostruire l'immagine. Queste unità si chiamano pixels. Ogni pixel raccoglie quindi una parte dell'intero campo della foto. Il campionamento dell'immagine è l'ampiezza, misurata in secondi di arco, di questa parte.
Il campionamento dipende dalle dimensioni del singolo pixel e dalla lunghezza focale del telescopio.

II FASE

Raccolta dati, misurazione dell'ombra in pixel e conversione in Km, correzione dell'errore di perpendicolarità.

I dati necessari per svolgere l'esercitazione vengono ricavati dal programma Virtual Moon Atlas.


Osserv.
Raggi solari
Raggi solari
Raggi solari
L'
ε
L
Punto subsolare
Meridiano centr. con libr.
Meridiano centr. senza libr.
λd
ελ
ε
col.
Terminatore

La foto utilizzata è stata scattata dal telescopio Ritchey-Chrétien da 360mm, F8 dell'osservatorio di Punta Falcone a Piombino. Essa ritrae una zona del polo Sud lunare dove si vedono il Clavius Crater e più in lontananza il Moretus Crater, del quale sarà misurata la formazione centrale.

Foto scattata il 14/02/2011 alle ore 22 UT.
Campionamento C = 0,24 Arcsec
Inserendo la data e l'ora nel programma Virtual Moon Atlas questo ci fornisce i dati. L'orario indicato è quello universale quindi bisogna aggiungere un'ora per il nostro fuso orario.

Diametro apparente disco lunare	d = 32,41'	il diametro reale è	D = 3476 Km
Colongitudine	Col = 50,9°		
Librazione in longitudine	lλ = - 7° 37'		
Latitudine punto subsolare	φs = 1,3°		

Coordinate selenografiche formazione

Latitudine	φd = 70,6° Sud
Longitudine	λd = 5,5° Ovest

CALCOLI

Come prima cosa si esegue la misura dell'ombra in pixel usando il programma ImageJ. Troveremo la misura apparente:

$$L'px = 22,34 \text{ pixel}$$

Per convertire questo dato in metri, dovremo conoscere quanti metri abbraccia il singolo pixel. Si imposta quindi una proporzione

$$d : D = C : Sim$$

$$Sim = D \times C / d = 0,429 \text{ Km}$$

La scala immagine Sim è la dimensione in Km, dell'area abbracciata dal singolo pixel. Adesso con una semplice moltiplicazione ricaveremo la lunghezza apparente in Km, L'

$$L' = Sim \times L'px = 9,583 \text{ Km}$$

A questo punto bisogna correggere la lunghezza apparente considerando l'errore di perpendicolarità.
Come abbiamo visto esso è indicato dalla lettera Є.
Come vediamo dal disegno 1, dove la Luna è vista da un osservatore posto sopra il Polo Nord, l'angolo Є è quell'angolo che divide il terminatore dal punto dove la direzione del nostro sguardo cade perpendicolare.

Infatti se il terminatore coincidesse con questo punto, sarebbe $\epsilon = 0$ e i raggi solari sarebbero perpendicolari alla direzione del nostro sguardo. Così però non è, quindi

$$\epsilon = Col - l\lambda = 50{,}9° - 7° \, 37' = 50{,}9° - 7{,}62° = 43{,}28°$$

Comunque la formula valida in tutti i casi è

$$\epsilon = 180 - Col - l\lambda$$

In questa formula bisogna inserire $l\lambda$ facendo attenzione al segno. Per esempio

$$\epsilon = 180 - 50{,}9 - (- 7{,}62) = 136{,}72$$

Come si vede il coseno di questo angolo è sempre, segno a parte, 0,728.
A noi interessa comunque il valore assoluto.
Applicando una formula di trigonometria ricaveremo la lunghezza vera dell'ombra L

$$L = L' / \cos \epsilon = 9{,}583 / 0{,}728 = 13{,}163 \text{ Km}$$

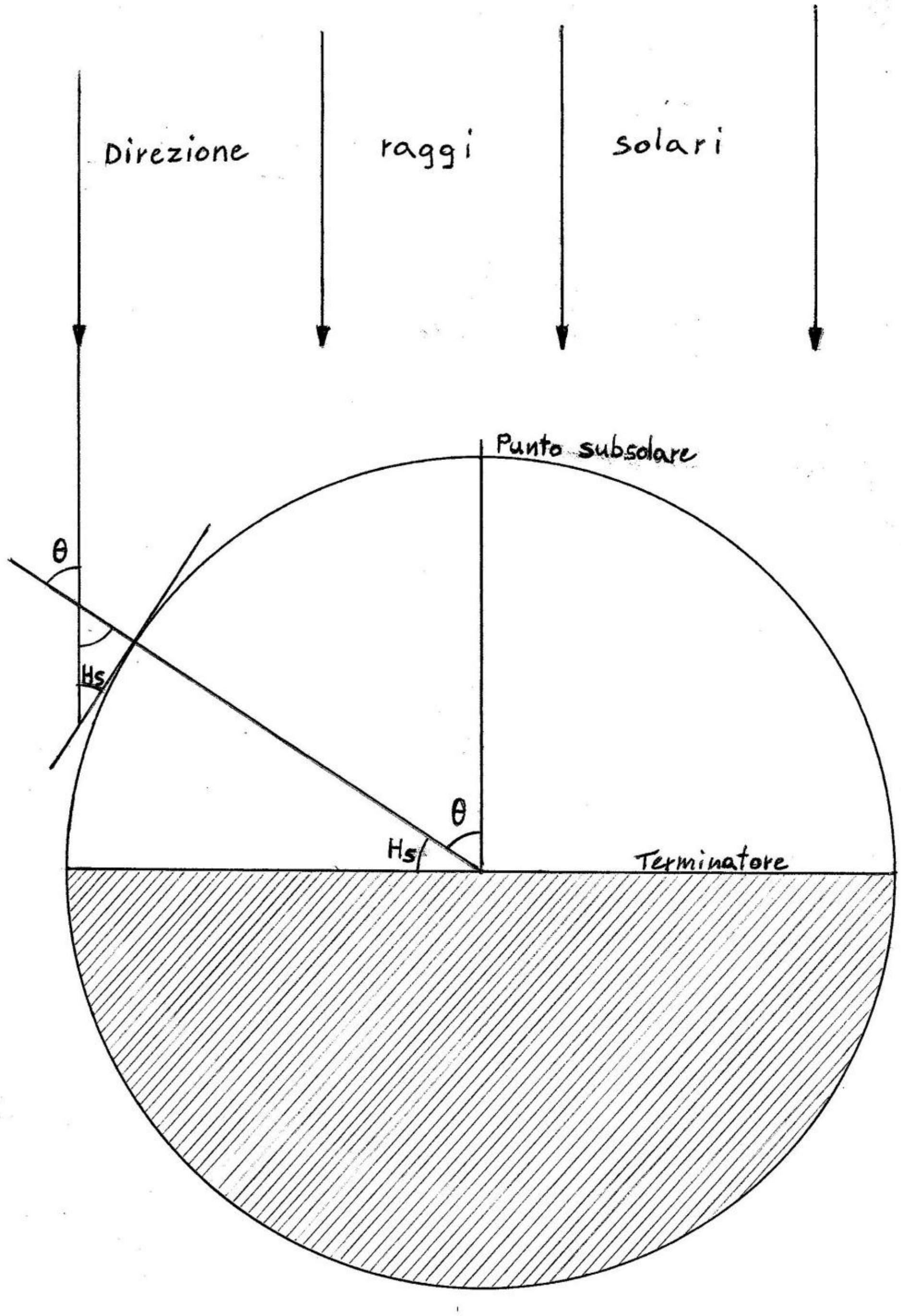
III FASE

Angolo di incidenza dei raggi solari sulla superficie lunare nel luogo della formazione, il quale serve, dato che conosciamo la lunghezza dell'ombra, a ricavare l'altezza della montagna.
Concetto per il quale viene applicata la formula di trigonometria sferica.

Nel disegno 1, per semplicità la montagna è disegnata sull'equatore. Se così fosse lavorando con gli angoli Col e longitudine della montagna λd, sarebbe semplice ricavare l'angolo di incidenza dei raggi solari Hs. Risulterebbe infatti

$$Hs = Col - \lambda d$$

Ma la montagna in realtà non è sull'equatore e quindi l'angolo di incidenza dei raggi solari non dipende solo dalla longitudine ma anche dalla latitudine.
In effetti tale angolo dipende dalla distanza dal terminatore. Se ci spostiamo solo in longitudine l'ombra diventa sempre più lunga man mano ci avviniamo al terminatore.
Se invece ci spostiamo solo in latitudine l'ombra diventa sempre più lunga avvicinandoci ai poli, perché così facendo ci avviciniamo comunque al terminatore.
Per trovare tale angolo dovremo quindi utilizzare una formula che tenga conto sia della latitudine che della longitudine.


Direzione
raggi
solari
Punto subsolare
θ
Hs
θ
Hs
Terminatore

Riferendosi al disegno 2 si può dire che:

l' angolo di incidenza dei raggi solari nel punto in esame (Hs), è l'angolo complementare della distanza angolare (θ), tra il punto subsolare ed il punto in misura, rilevata lungo il circolo massimo passante tra questi due punti.

La seguente formula di trigonometria sferica ci permette di ricavare il coseno dell'angolo θ in funzione delle coordinate selenografiche del punto subsolare e della formazione.

$$\cos\theta = \cos(\lambda s - \lambda d) \times \cos\varphi s \cos\varphi d + \sin\varphi s \sin\varphi d$$

La longitudine del punto subsolare λs, non viene fornita direttamente, ma è possibile ricavarla sapendo che il punto subsolare si trova sempre, ovviamente, a 90° dal terminatore

$$\lambda s = 90° - Col = 90° - 50{,}9° = 39{,}1°$$

Quindi

$$\cos\theta = \cos(39{,}1 - (-5{,}5)) \times \cos 1{,}3 \cos -70{,}6 + \sin 1{,}3 \sin -70{,}6$$

Bisogna fare attenzione ai segni in base alle latitudini e longitudini

$$\cos\theta = \cos 44{,}6 \cos 1{,}3 \cos -70{,}6 + \sin 1{,}3 \sin -70{,}6 = 0{,}215$$

Ed infine si ricava l'altezza della montagna con la

$$H = L \times \cos\theta = 13{,}163 \times 0{,}215 = 2{,}830 \text{ Km}$$

Dalla cartografia lunare risulta un' altezza di 2700 m

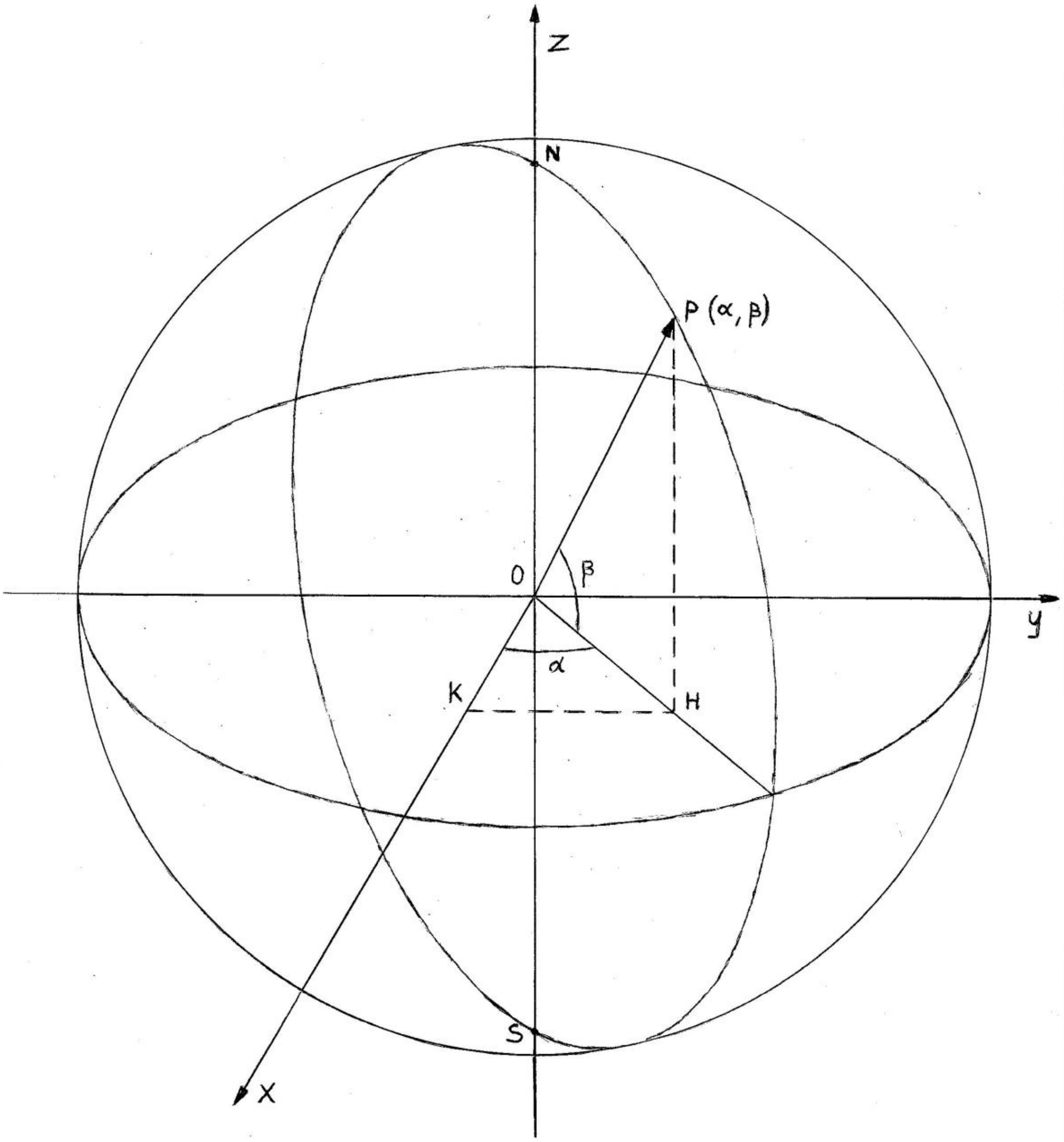
DIMOSTRAZIONE FORMULA TRIGONOMETRIA SFERICA

Prendendo come riferimento il disegno 3 dove è raffigurata una sfera con raggio unitario, possiamo considerare il raggio che unisce il centro ad un punto P sulla superficie della sfera, come ad un vettore identificato da tre componenti cartesiane riferite ad un sistema tridimensionale X, Y, Z.
Queste componenti cartesiane possono essere ricavate usando la trigonometria
Possiamo cioè scrivere, ricordando che il raggio della sfera è considerato uguale a 1

$$OH = \cos\beta$$

$$OK = \cos\alpha \times OH \quad \text{ovvero}$$

$$OK = \cos\alpha \cos\beta$$



Tav. 3

Ma OK corrisponde alla coordinata X, quindi

$$X = OK = \cos\alpha \cos\beta$$

Nello stesso modo si procede per le altre coordinate

$$Y = HK = \sin\alpha \times OH$$
$$Y = HK = \sin\alpha \cos\beta$$

infine

$$Z = HP = \sin\beta$$

Quindi il vettore OP può essere identificato dalla seguente relazione

$$OP = (\cos\alpha \cos\beta, \sin\alpha \cos\beta, \sin\beta)$$

Notare che gli angoli α e β rappresentano rispettivamente la longitudine e la latitudine del punto P.

Se prendiamo un altro vettore, ad esempio OQ, definito anch'esso da tre componenti cartesiane, dal calcolo vettoriale si ha

$$\cos (OP, OQ) = OP \times OQ / |OP| \times |OQ|$$

Cioè il coseno della distanza angolare tra i due vettori è uguale al prodotto scalare dei vettori diviso il prodotto dei loro moduli. Ma i moduli hanno valore unitario per cui il loro prodotto è uguale a 1. Quindi chiamando $\alpha 1$ e $\beta 1$ gli angoli di longitudine e latitudine del punto P e $\alpha 2$ e $\beta 2$ quelli del punto Q e mettendo il $\cos (OP, OQ) = \cos \theta$, si avrà

$$\cos \theta = (\cos\alpha 1 \times \cos\beta 1, \sin\alpha 1 \times \cos\beta 1, \sin\beta 1) \times (\cos\alpha 2 \times \cos\beta 2, \sin\alpha 2 \times \cos\beta 2, \sin\beta 2)$$

Ma facciamo un passo indietro e proviamo ad eseguire la moltiplicazione tra questi due trinomi considerando i vettori rappresentati dalle componenti cartesiane X, Y, Z.

Ricordiamo anche che il prodotto tra due vettori si esegue moltiplicando il modulo del primo per la proiezione del secondo sul primo. Quindi se i vettori sono tra loro ortogonali il prodotto è 0, perché la proiezione del secondo sul primo è nulla

$$\cos \theta = (X1 + Y1 + Z1) \times (X2 + Y2 + Z2)$$
$$\cos \theta = X1\,X2 + X1\,Y2 + X1\,Z2 + Y1\,X2 + Y1\,Y2 + Y1\,Z2 + Z1\,X2 + Z1\,Y2 + Z1\,Z2$$

i prodotti vettoriali tra coordinate ortogonali tra loro si annullano, quindi spariscono

$$X1\,Y2,\ X1\,Z2,\ Y1\,X2,\ Y1\,Z2,\ Z1\,X2,\ Z1\,Y2$$

e rimane

$$\cos\theta = X1\,X2 + Y1\,Y2 + Z1\,Z2$$

ritornando alla rappresentazione trigonometrica e facendo le dovute sostituzioni si avrà

$$\cos\theta = \cos\alpha1\,\cos\beta1 \times \cos\alpha2\,\cos\beta2 + \sin\alpha1\,\cos\beta1 \times \sin\alpha2\,\cos\beta2 + \sin\beta1\,\sin\beta2$$

mettendo in evidenza $\cos\beta1 \times \cos\beta2$

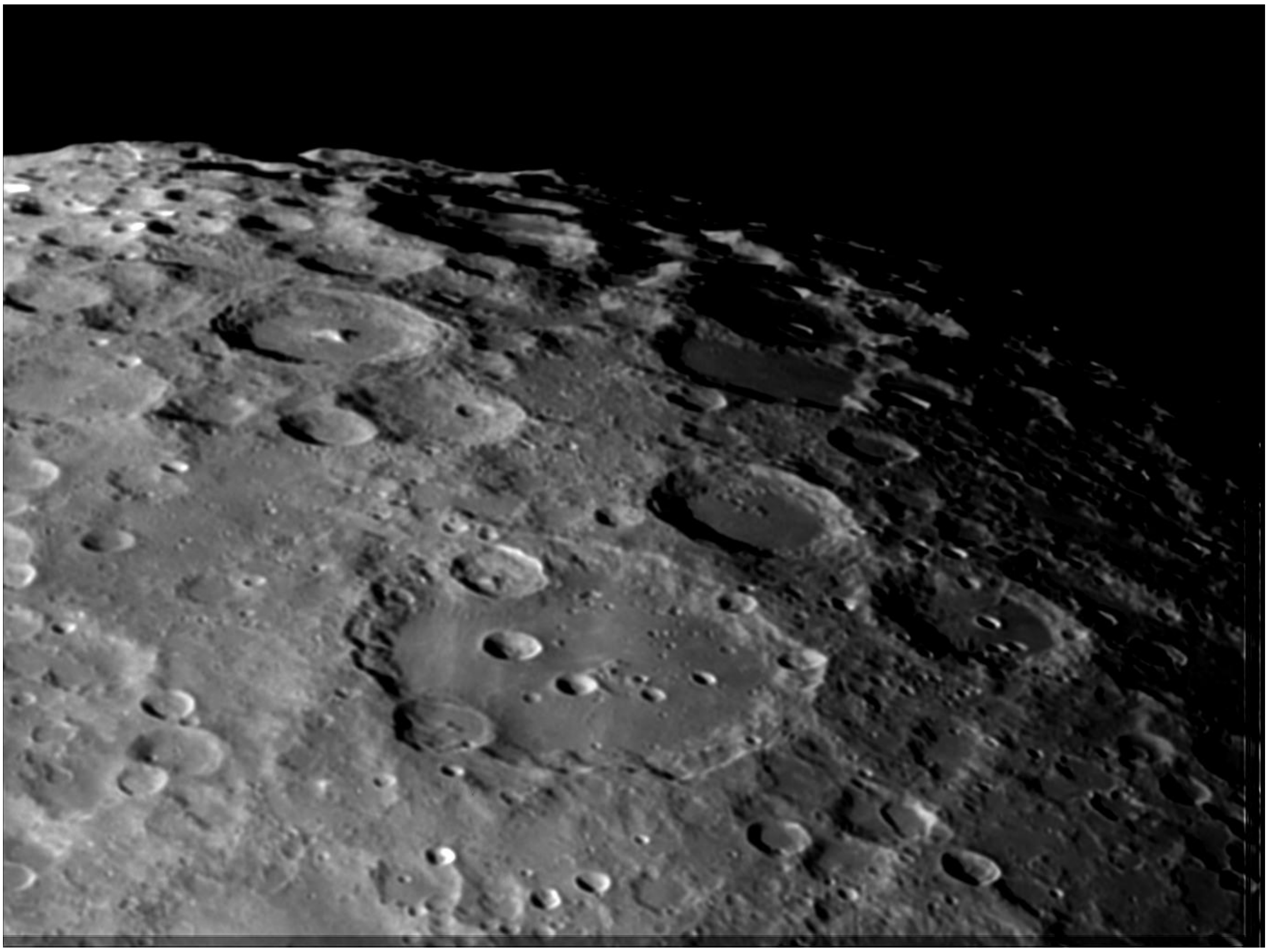
$$\cos\theta = (\cos\alpha1 \times \cos\alpha2 + \sin\alpha1 \times \sin\alpha2) \times \cos\beta1 \times \cos\beta2 + \sin\beta1 \times \sin\beta2$$

essendo, dalle regole della trigonometria

$$(\cos\alpha1 \times \cos\alpha2 + \sin\alpha1 \times \sin\alpha2) = \cos(\alpha1 - \alpha2)$$

possiamo scrivere

$$\cos\theta = \cos(\alpha1 - \alpha2) \times \cos\beta1 \times \cos\beta2 + \sin\beta1 \times \sin\beta2$$



Da Clavius a Moretus Crater
Foto di Riccardo Particelli